

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Continuidad y derivabilidad de funciones.

- 1.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
- 2.- Determina los valores de a y de b para que sea continua la función: $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \in (-\infty, -\pi/2) \\ -1 & \text{si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ x^2 + x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ ax + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- 3.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{a(x^2-1)}{|x-1|}$
- 4.- La función $f(x) = \frac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$ es discontinua en $x=2$. Calcula b.
- 5.- Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene alguna solución en $[1, 2]$.
- 6.- Supóngase que f es continua en todos los números reales excepto en $x=6$. Si $g(x) = \frac{3x}{x-2}$ ¿para qué valores de x puede asegurarse la continuidad de $f \circ g$?
- 7.- Calcular a y b para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} 4^{x/\pi} & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ a \text{sen } x + b & \text{si } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ \text{cos } x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$
- 8.- La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$ tiene discontinuidad evitable en $x=2$. Halla m y n y todas sus discontinuidades.
- 9.- - La ecuación $x^5 = 5 - 3x$ tiene una solución comprendida entre 1 y 2. ¿Por qué?
- Demuéstrase que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$
- 10.- Dibuja una función acotada en $[1, 3]$, que $f(1) > 0$, $f(3) < 0$ y no exista un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.
- 11.- Sea $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Demostrar que exista al menos un punto $a \in (1, 2)$ tal que $f(a) = \sqrt{5}$.
- 12.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{1+2^{1/x}}{1-2^{1/x}}$.
- 13.- Determina a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ bx + 1 & \text{si } 0 < x < 5 \\ 1/x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ sea continua.
- 14.- Siendo $f(x) = \frac{1}{x-1}$ a) ¿es continua en el intervalo $(1, 2)$?
b) ¿es acotada en dicho intervalo?
c) ¿se contradice el teorema de Weierstrass?
- 15.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+\text{tg } x}$ y comprueba que en el origen tiene una discontinuidad evitable. Redefine la función para que sea continua en el 0.
- 16.- a) Si f es una función continua en un punto a, y g es discontinua en dicho punto ¿puede ser $f+g$ continua en a?
b) Da un ejemplo de una función discontinua en todos los puntos de $[0, 1]$ y tal que su valor absoluto sea continua en todo el intervalo

17.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β , la continuidad de la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \alpha}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

18.- Si $f(x)$ es una función continua para todo valor de x , y se sabe que $-1 \leq f(-1)$ y $f(1) \leq 1$, demostrar que existe un punto $a \in [-1, 1]$ con la propiedad de que $f(a) = a$.

19.- Da un ejemplo de una función continua en un punto en el que toma el valor 0 y que sea positiva en un entorno de dicho punto exceptuando él mismo.

20.- Dada la función definida por $f(0)=7$ y $f(x) = \frac{7 - 16^{1/x}}{1 + 16^{1/x}}$ si $x \neq 0$.

a) Determina los puntos en que f es continua.

b) Demuestra que existe un punto del intervalo abierto $(2, 4)$ en el que f toma el valor 1.

21.- Se considera la función $f(x) = x^3 - x + 3$. Utilizando el teorema de Bolzano, calcula un entero a que verifique $f(c) = 0$ para algún $c \in (a, a+1)$.

22.- Determina los valores de a y de b para que sea derivable la función $f(x) = \begin{cases} \ln(e + \sin x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

23.- Averigua si la función $|x - 1|$ es derivable en $x=1$.

24.- Dada una función f se sabe que es continua y que existen dos números a y b tales que :

$$f(x) = \cos x \quad \text{si } x \text{ es negativo.}$$

$$f(x) = a + x^2 \quad \text{si } x \text{ está entre } 0 \text{ y } 1. \quad \text{Calcula } a \text{ y } b, \text{ y averigua si es derivable en } 0 \text{ y en } 1.$$

$$f(x) = b/x \quad \text{si } x \text{ es mayor que } 1.$$

25.- La recta de ecuación $y = 6x + a$ es tangente a la curva $f(x) = \frac{bx - 1}{bx + 1}$ en el punto $(0, f(0))$. Hállese a y b .

26.- Sea la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$. Calcula b y c sabiendo que en los puntos de abscisa 0 y 1 la tangente a la gráfica es horizontal.

27.- ¿ En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos de abscisa 1 y e .

28.- Utiliza el teorema de Rolle para demostrar que, cualquiera que sea el valor de m , la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no tiene dos soluciones reales.

29.- Sea a un n° real positivo. La tangente a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto $(a, \ln a)$ corta al eje de ordenadas en el punto P. Si Q es el punto de intersección del eje OY con la recta $y = \ln a$, prueba que la distancia entre P y Q es una constante.

30.- Justifica que si $f(x) = -3 + x^5(x - 2)^{15} \cos x$ entonces $f'(x)$ tiene al menos una raíz en $(0, 2)$.

31.- Sea $f(x) = x^3 + x + m$ una función donde m es un n° natural :

→ ¿ Exista algún valor c que verificando $f(c) = 0$?

→ ¿ Puede haber dos valores a y b tales que $f(a) = f(b)$? Justifica las respuestas.

32.- Sea f una función real definida en todo \mathbf{R} . Se conocen sobre f los siguientes datos :

→ es derivable en $x=-1$

→ es discontinua en $x=0$

→ es derivable en $(2, \infty)$

→ $f(3) = 7$, $f(4) = 5$ y $f(5) = 7$

Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) f es continua en -1

b) f es derivable en 0

c) En $[10, 15]$ alcanza un máximo y un mínimo.

d) En algún punto entre 3 y 5 la derivada vale 0

e) En algún punto entre 4 y 5 la derivada vale 2.

33.- Si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$, comprueba si verifica el teorema de Lagrange en el intervalo $[-2, 0]$

calculando en caso afirmativo el o los puntos a los que hace referencia el citado teorema.

34.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$. Esboza una gráfica de f y estudia la continuidad y la

derivabilidad de f en $[-2, 2]$.

35.- Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{e^x - 1 - x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \frac{x^3}{3}}{x - \operatorname{tg} x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tg} x}$;
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{\operatorname{sen}^2 x}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \operatorname{sen}(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{e^x}$; Calcúlense los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos^2(\lambda x) - 1} = -1$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2}$.

36.- Se considera la función $x^{1995} + x + 1 = 0$

- Demuestra que tiene al menos una solución real
- Utilizando el teorema de Rolle o algún otro teorema, demuestra que sólo tiene una solución.

37.- Dada la función $f(x) = x^n \operatorname{sen} 1/x$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, siendo n un número natural. Se pide:

- Demuestra que f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.
- Demuestra que f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

38.- Se considera la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función f en el intervalo $[-1, 1]$?

39.- Dada la función: $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b$, determina a y b para que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero sea cero.

40.- Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, calcula: asíntotas, máximos y mínimos.

41.- Calcula las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$.

42.- Calcula los máximos y los mínimos de la función $y = x^2 e^{-x}$

43.- Estudia la concavidad y convexidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.

44. Dada la función $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-2}}$, determinar su dominio de definición y sus intervalos de crecimiento, así como las asíntotas y los puntos de inflexión de la gráfica.

45. Dada la curva $y = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$, determinar su dominio de definición sus asíntotas y sus máximos y mínimos relativos.
46. Dada la función $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, determinar su dominio, sus asíntotas y sus máximos y mínimos relativos.
47. Dada la función $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2 - 4}$ estudia su dominio de definición, extremos, asíntotas y represéntala.
48. ¿ Se puede aplicar el teorema de Cauchy a las funciones : $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3 - 2x - 1$ en el intervalo $[-2, 1]$? En caso afirmativo determina el punto en el que se verifica.
49. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + a = 0$, no puede tener en el intervalo $[-1, 1]$ más de una raíz cualquiera que sea el valor de a .
50. Dadas las funciones $f(x) = (x^3 - 2)e^x$ y $g(x) = (x + 1)\cos x$, demostrar que existe al menos un punto a en el intervalo $[0, \pi]$ en el cual $f(a) = g(a)$.
51. Probar que existe un número real c con $0 < c < \frac{\pi}{6}$ tal que $\frac{1}{2} \operatorname{sen} c = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cos c$.
52. Probar que la función $f(x) = |x + 1|$ no verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 0]$. Justificar el motivo.
53. Una función derivable en todo R verifica: $f(0) = -2$ $f(2) = 6$. Prueba que existe un pto c en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 4$. Si además tiene derivada continua y $f'(0) = 0$ probar que hay un punto en $(0, 2)$ en el que la derivada de f toma el valor 3.
54. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $x^4 + 3x - 1$, y deducir que la ecuación $x^4 + 3x - 1 = 0$ sólo tiene dos soluciones reales.
55. Sea una función derivable que verifique la condición $f'(x) < 1$ para todo x real. Razonar si pueden existir dos valores distintos a y b verificando $f(a) = a$ y $f(b) = b$.
56. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:
- Hallar a , b y c para que la función admita un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 0$, siendo $f(1) = 5$.
 - Para los valores anteriores de a , b y c halla los extremos relativos de la función, y los valores máximo y mínimo de dicha función en el intervalo $[-3, 5]$.
57. Dada la función $f(x) = x + \cos \pi x$, se pide:
- Encontrar una función $g(x)$ de la forma $mx^2 + n$ tal que $g(0) = f(0)$ y $g(1) = f(1)$, y demostrar que existe un punto t en el intervalo $(0, 1)$ con la propiedad de que $f'(t) = g'(t)$.
 - Enuncia el resultado teórico utilizado en el apartado a)
58. Sobre la curva de ecuación $y = x^3 - 3x + 2$ se toma un punto cualquiera de abscisa a .
- Comprobar que, salvo un caso excepcional de a , existe otro punto sobre la curva de manera que las tangentes a la misma en esos dos puntos son paralelas.
 - El valor excepcional ¿ a que punto corresponde en la gráfica? Razonar la respuesta.
59. Sea la función $y = 2e^{-2|x|}$.
- Estúdiese su monotonía, extremos relativos y asíntotas.
 - Calcúlese el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $x = 1$ y $x = -1$

60 a) Calcúlense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Esbócese la gráfica de f y calcúlense $\int_1^3 xf(x)dx$.

61- Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demuéstrese que para $x > 0$ se verifica:

$$\arctg(2x) - \arctg(x) < \frac{x}{1+x^2}.$$

62- Estúdiense la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus

puntos de inflexión. Esbócese su gráfica. Calcúlense el área delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

63- Sea $P(a, \text{sen } a)$ un punto de la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Sea r_p la recta tangente a dicha gráfica en el punto P y A_p el área de la región determinada por las rectas r_p , $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$. Calcúlense el punto P para el cual el área A_p es mínima. (Nota: Puede asumirse, sin demostrar, que la recta r_p se mantiene por encima del eje OX entre 0 y π)

64- Sea $f(x) = e^x + \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$.

a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas.

b) Pruébese que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ y esbócese la gráfica de f .

65- Una ventana románica consiste en un rectángulo coronado por un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10m.

66- Hallar el radio y la amplitud que deberá tener un sector circular de 4 m. de perímetro para que su área sea máxima.

67- Se considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) , siendo x e y positivos, y la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$. Haya x e y para que el área de dicho triángulo sea máxima.

68- Un bote cilíndrico ha de tener capacidad para 100π cm³. Calcula sus dimensiones para que sea mínima la cantidad (superficie) de chapa utilizada en su fabricación.

69- Se consideran las rectas del plano, con pendiente negativa, que pasando por el punto $P(1, 2)$ cortan al eje OX en un punto A y al eje OY en un punto B . Determinar de entre todas ellas la que hace mínima la suma $OA + OB$.

70- Calcula las dimensiones de una página de un libro para obtener la mayor economía de papel, si la parte escrita ha de ocupar 400 cm², los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm., y los laterales de 3 cm

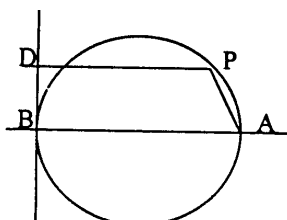
71- Dos postes de 12 y 18 m. de altura distan entre sí 30m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿En qué posición debe situarse el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

72- Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo isósceles de perímetro 25 cm. si el lado desigual mide 5 cm.

73- Calcula el cilindro y el cono de mayor volumen que pueden inscribirse en una esfera de radio unidad.

74- Sea AB un diámetro de la circunferencia de radio unidad, BD la recta tangente a la circunferencia, un punto de la circunferencia, PD la perpendicular a BD y AP una cuerda.

Determinar las coordenadas (x, y) del punto P para que el área del trapecio $ABDP$ sea máxima.



75- Una pista de atletismo consiste en dos semicírculos adosados a los lados opuestos de un rectángulo. Si el perímetro de la pista es de 400 m.

calcular las dimensiones de la misma que hacen máxima el área del rectángulo.

- 76- Hallar sobre la recta $x + 3y = 30$ un punto P con la propiedad de que la suma de las distancias al origen y al eje OX sea mínima.
- 77- Se quiere dividir un alambre de 2 unidades de longitud en dos partes para construir un triángulo equilátero y una circunferencia, de forma que la suma del área del triángulo y del círculo correspondiente sea mínima. Determina las longitudes de ambas partes.

78- Estudia y representa gráficamente las funciones :

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}; y = \frac{x}{1 - |x|}; y = x \cdot \ln x; y = \frac{\ln x}{x}; y = \ln x^2; y = x \cdot e^x;$$

$$y = x \cdot e^{-x}; y = \frac{e^x}{x}; y = x^2 \cdot e^{-x^2}; y = e^{\frac{1}{x}}; y = x + \operatorname{sen} x; y = \cos^2 x$$

79- Calcula :

| | | | | | |
|---|--|--|-----------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| a $\int \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 4} dx$ | b $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | c $\int x \ln x dx$ | d $\int x \cos x dx$ | e $\int \frac{x dx}{x+1}$ | f $\int \frac{dx}{e^x + 1}$ |
| g $\int_0^1 e^{2x} dx$ | i $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ | j $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$ | k $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$ | l $\int \frac{x}{e^x} dx$ | m $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx$ |

80- Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2(x^2-1)}$ a) Calcula $\int f(x) dx$. b) Razona si $\int_1^3 f(x) dx$ representa el área que la curva f(x) determina con el eje OX ,x=1 ,x=3

81- Halla el área comprendida entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{3x^2}{2}$.

82- Calcula $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$.

83- Se considera la función $f(x) = \int_0^x (2t - 3) \cdot e^{t^2} dt$. Estudia su concavidad y su convexidad (no intentes calcular una primitiva).

84- Se considera la función $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Calcula los puntos en que f alcanza sus extremos relativos. Calcula $\int_0^b f(x) dx$ siendo b el punto en el que f alcanza el máximo.

85- Calcula el área encerrada por la recta $y = x + 1$, y la parábola $y = -3 + 4x - x^2$.

86- Calcula una primitiva de la función $f(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x$.

87- Se considera la función $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$, exprésala de la forma $Ax + B + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$ y calcula $\int_2^3 f(x) dx$.

88- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, averigua si es derivable en 0, y calcula el área encerrada por la función y las rectas $y=0$, $x=-1$ y $x=1$.

89- Las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 3 - x$ determinan dos recintos acotados en el primer cuadrante. Calcula el área de los dos recintos.

90- Dada la función $y = e^{2x} - 4x$, calcula sus extremos y el área encerrada por la gráfica de la función, la recta $x=1$ y los ejes cartesianos.

91- Halla el área de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, y el volumen del sólido engendrado al girar dicha elipse alrededor del eje OX.

92- Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = e^{-3x}$ y las rectas $x=1$, $x=3$.

93- Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

94- Determina a y b para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y para esos valores, calcula

$$\int_{-2}^2 f(x) dx.$$

95- Hallar el área del recinto plano limitado por el eje OY, la curva $y = \cos 2x$ y la tangente a la misma en el punto de abscisa $x = \pi/4$.

96- Se tiene una parábola de ecuación $y = x^2$, y sobre ella un punto P de abscisa $a > 0$. Se considera el triángulo de vértices O(0,0), el punto P y el punto A de corte de la tangente a la parábola en P con el eje OX. Hallar la razón de las áreas de las dos regiones en que tal triángulo queda dividido por la gráfica de la parábola.

97- La parábola de ecuación $y = x - x^2$ determina con el eje OX un recinto acotado. Hallar una recta que pasando por el punto (0, 0) divida a dicho recinto en dos partes de igual área.

98- Calcular el área que encierra la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 2}$ con el eje OX y las rectas de ecuaciones:

$$x = 1 \text{ y } x = -1$$

99- Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determinense a, b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y - 4x = 0$, y el área comprendida por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$, sea igual a 1

100- Hállese el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2x.$$

101.- Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas $x = -4$, $x = -2$.

102.- Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

103.- Hallar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln x & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua en todo R.

104.- Sea f la función dada por $f(x) = e^{2x-x^2}$.

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas de f.

b) Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

105.- Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.

106.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = \ln x$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

107.- Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$. Se pide hallar:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.
- b) El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = -2$, $x = 2$.