1- *Halla dos matrices cuadradas de orden dos y no nulas, de modo que su producto sea la matriz nula*

Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2- *La matriz A es de orden (2,5) y la B es (5,4). Calcula la dimensión de la matriz C para que (A.B).C sea una matriz cuadrada.*

$A_{2,5}.B_{5,4} = M_{2,4} \Rightarrow M_{2,4}.C_{m,n}$ Necesariamente $m = 4$ (para que se pueda realizar el producto y $n = 2$ para que el producto final sea una matriz cuadrada *2,2*

3- *Comprueba que una matriz escalar conmuta con cualquier matriz de su misma dimensión.*

Basta con un ejemplo al tratarse de una comprobación.

4- *Comprueba que el producto de matrices verifica la propiedad asociativa utilizando las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A.B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A.B).C = \begin{pmatrix} 16 & 16 & -11 & 3 \\ 18 & 10 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B.C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A.(B.C) = \begin{pmatrix} 16 & 16 & -11 & 3 \\ 18 & 10 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

5- *Comprueba que dada una matriz cuadrada A, las matrices A + ^tA, A – ^tA son simétrica y antisimétrica respectivamente.*

Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$,es simétrica

Una matriz es antisimétrica si coincide con la opuesta de su traspuesta:

$(A - A^t)^t = A^t - (A^{t)})^t = A^t - A = -(A - A^t)$, es antisimétrica.

7- ***Calcula las potencias enésimas de las matrices:*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, basta con comprobar que se verifica para n =1, n = 2, suponer cierta A^n y comprobar que se verifica para *n+1* (método de inducción completa)

- $B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

8- Calcula x e y (reales) para que la matriz A verifique la ecuación: $A^2 + xA + yI = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x + 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4; y = 3$$

9- Calcula todas las matrices que conmutan con la matriz del anterior ejercicio.

Solución:

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y & x + 2y \\ 2z + t & z + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z & 2y + t \\ x + 2z & y + 2t \end{pmatrix}$, igualando elementos, agrupando y simplificando términos, obtenemos el sistema: $\begin{cases} y = z \\ x = t \\ t = x \\ z = y \end{cases}$ $\Rightarrow$ Las matrices buscadas son todas las de la forma: $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \forall x, y \in \Re$

10- Siendo A , B y C tres matrices cualquiera ,comprueba si son ciertas las relaciones siguientes:

a) Si A . B =A .C entonces B = C

b) (A + B) (A - B)=A^2 - B^2

c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Solución:

a. No es cierta ya que por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo sería cierta si $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ya que $A^{-1}.A.B = A^{-1.}.A.C \Rightarrow B = C$

b. No es cierta ya que $(A + B)(A - B) = A^2 + AB - BA - B^2$. Sería cierta si $AB=BA$

c. No es cierta por la misma razón que la anterior, la no conmutatividad del producto de matrices.

11- Sea A la matriz de orden dos tal que a_{ij}=i+j-1. Halla todas las matrices B que verifiquen simultáneamente las relaciones b y c del ejercicio anterior.

Solución: La matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Buscamos por tanto todas las matrices que conmutan con A, ya entonces se verificarían las relaciones b y c del problema anterior:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=x+2y\\ y+2t=2x+3y\\ 2x+3z=z+2t\\ 2y+3t=2z+3t\end{cases}$$ de la 1ª y la 4ª ecuación se llega a $y=z$

Sustituyendo z por y en la 3ª ecuación se observa que esta es idéntica a la 2ª, que después de simplificar nos queda $\Rightarrow\ x+y-t=0$. Tenemos por tanto dos ecuaciones para resolver un sistema de cuatro incógnitas,

cuya solución será: $\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=y\\ t=x+y\end{cases}$ y la matriz buscada es: $\begin{pmatrix}x & y\\ y & x+y\end{pmatrix}\forall x,y\in\Re$

12- Dadas las matrices : $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ ***resuelve las siguientes ecuaciones matriciales :***

a) ABX = C ; b) AXC = B; c) ACX - ABX = I ; d) BX + 2A = 2C

a) Antes de operar, despejamos la matriz X, en función de las matrices producto y sus inversas. Cabe recordar, que una matriz por su inversa es igual a la matriz unidad: $M.M^{-1}=I$

$$A.B.X=C\Rightarrow A^{-1}.A.B.X=A^{-1}.C\Rightarrow B.X=A^{-1}.C\Rightarrow B^{-1}.B.X=B^{-1}.A^{-1}.C\Rightarrow X=B^{-1}.A^{-1}.C$$

Para el cálculo de la inversa comprobaremos que el determinante de la matriz $|M|$ sea $\neq$ de 0 (en caso contrario no existe la inversa). Acto seguido hallamos la matriz adjunta de la matriz y la traspuesta de la adjunta. La matriz inversa equivale a la traspuesta de la adjunta, partido por el determinante de la matriz.

$$|A|=5+6=11\neq 0.\quad A^{adj}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\quad [A^{adj}]^t=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$|B|=2+3=5\neq 0.\quad B^{adj}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.\quad [B^{adj}]^t=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5/11 & 2/11\\ -3/11 & 1/11\end{pmatrix}.\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}2/5 & 3/5\\ -1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{55}\begin{pmatrix}-6 & 9\\ -7 & -17\end{pmatrix}$$

b) $A^{-1}AXCC^{-1}=A^{-1}BC^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}BC^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{11}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\dfrac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{3}=$

$$=\frac{1}{11.3}\begin{pmatrix}7 & -11\\ -2 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{11.3}\begin{pmatrix}-4 & -25\\ 9 & 15\end{pmatrix}=\frac{5.3}{11.3}\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\frac{5}{11}\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

c) $ACX-ABX=I\Rightarrow(AC-AB)X=I\Rightarrow(AC-AB)^{-1}=X$

$$\begin{pmatrix}1+2 & 2+(-2)\\ 3-5 & 6+5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-2 & -3-4\\ 3+5 & -9+10\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{110}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{-7}{110} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{55} \end{pmatrix}$$

d) $BX+2A = 2C \Rightarrow BX = 2C-2A \Rightarrow B^{-1} BX = 2B^{-1}(C-A) \Rightarrow X = 2B^{-1}(C-A)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5} \Rightarrow X = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{-24}{5} & \frac{-8}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{-16}{5} \end{pmatrix}$$

13- Demuestra que si A es una matriz de orden impar y antisimétrica su determinante es nulo.

Solución: Si A es antisimétrica $A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A|$. Como $|A^t| = |A|$ y $|-A| = (-1)^n |A|$, una matriz antisimétrica verifica $|A| = (-1)^n |A|$, si n es impar $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

14- Comprueba que si A es una matriz cuadrada puede descomponerse en suma de una matriz simétrica más otra antisimétrica (mira el problema nº 6).

Basta con comprobar que cualquier matriz cuadrada puede escribirse de la forma:

$A = \frac{(A+A^t)}{2} + \frac{(A-A^t)}{2}$ suma de simétrica y antisimétrica respectivamente.

15- Calcula los determinantes siguientes:

$$a)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ d & c & b & a-x \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Desarrollando por los adjuntos de la cuarta fila (todas las matrices son triangulares) y ordenando:

$$-d\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (a-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d$$

b) $$\xrightarrow{C2=C2-C1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C1=C1+C3} -2.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2).(-1)(-3) = -6$$

c) Restamos cada columna de la anterior

$$\xrightarrow{\begin{cases}C4=C4-C3\\ C3=C3-C2\\ C2=C2-C1\end{cases}} \begin{vmatrix} x & 1-x & 0 & 0\\ 1 & x-1 & 1-x & 0\\ 1 & 0 & x-1 & 1-x\\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F1=F1+F2+F3+F4\\ F2=F2+F3+F4\\ F3=F3+F4}} \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & x-1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & x-1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$=(x+3)(x-1)^3$$

El desarrollo anterior es válido para calcular cualquier determinante de la forma $\begin{vmatrix} a & b & ... & b\\ b & a & ... & b\\ ... & ... & ... & ...\\ b & b & ... & a \end{vmatrix}$ es decir determinantes de matrices $A_{n\times n}$ cuyos elementos son: $\begin{cases} a_{ij} = a \ si \ \ i=j\\ a_{ij} = b \ si \ i \neq j \end{cases}$

16- *Comprueba si A^n tiene inversa ,siendo:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución : Teniendo en cuenta que: $|A| = 1$ y que $|A.B| = |A|.|B|$

$|A^n| = \left|\underbrace{A.A.....A}_{n}\right| = \underbrace{|A|.|A|....|A|}_{n} = 1^n = 1 \neq 0$, y como una matriz tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$, por lo tanto es <u>inversible</u>

Si te hace ilusión calcular la potencia enésima, es ésta: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17- **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ \text{-}1 & 2 & 1\\ 1 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix}$ **resuelve la ecuación matricial:**

A.B.X - C.X = 2C

Solución: $A.B.X - C.X = 2C \Rightarrow (A.B-C).X = 2C \Rightarrow (A.B-C)^{-1}(A.B-C).X = (AB-C)^{-1}.2C \Rightarrow$

$X = (A.B-C)^{-1}.2C;$

$A.B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3\\ 8 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A.B-C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3\\ 9 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ como $|(A.B-C)| = -1$, calculamos su inversa:

$$(A.B-C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -15\\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$X = (A.B - C)^{-1}.2C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

18- Los números 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 son divisibles por 17. Demuestra que el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ***también es divisible por 17.***

Solución:
Aplicando la propiedad que dice que si se sustituye una fila de un determinante por su suma con una combinación lineal del resto, el determinante que se obtiene coincide con el inicial:

$$C_5 = C_5 + 10C_4 + 10^2 C_3 + 10^3 C_2 + 10^4 C_1$$

Una vez realizado esto, podemos sacar 17, Aplicando la propiedad que dice que para multiplicar un número por un determinante, basta con multiplicarlo por una línea

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 20604 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53227 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 57755 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 20927 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 78421 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 1212 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3131 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 1515 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 1231 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 4613 \end{vmatrix}$$

Al ser un determinante formado por números enteros un nº entero, el determinante dado es divisible por 17,

19- Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ ***; Calcula el valor de "a" para los que la matriz A no tiene inversa, y calcula la inversa para a = 2***

Solución: Calculamos su determinante: $|A| = -a^2 + 4a - 3 = (1-a)(a-3)$. NO tiene inversa entonces para los valores $a = 1$ y $a = 3$. La inversa para $a = 2$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

20- Escribe dos condiciones distintas y cada una de ellas equivalente a que una matriz sea inversible.

¿Es inversible la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ***?***

- Para que una matriz sea inversible o regular, su determinante (tiene que ser cuadrada) tiene que ser diferente a 0 $|A| \neq 0$.

- Para que una matriz cuadrada sea inversible o regular, el rango de la matriz debe ser igual a su dimensión. A_{nxn} *es inversible si el* $rango(A) = n$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 + 0 + 6 - 4 - (-1) - 0 = 1 \Rightarrow \text{ Es inversible.}$$

21- Calcula A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**.**

1º.Calculamos el determinante de A y comprobamos que es distinto de cero.

$|A| = -1$ (es triangular)

2º.Calculamos la matriz adjunta de A.

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

3º.Calculamos la matriz adjunta traspuesta.

$$\left[A^{adj}\right]^t = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4º.Obtenemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{adj}\right)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

22- Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ***tiene por determinante -6, calcula el determinante de la matriz A + 2A+ 3A + 4A, y el determinante de la matriz inversa de A^2.***

Teniendo en cuenta que: $A + 2A + 3A + 4A = 10\,A$

- $\Rightarrow |\mathrm{A} + 2\mathrm{A} + 3\mathrm{A} + 4\mathrm{A}| = |10A| = 10^4|A| = 10^4.(-6)$
- $\left|(A^2)^{-1}\right| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A||A|} = \frac{1}{36}$

23- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

- ***Hallar los valores reales de x para los que A tiene inversa.***

  La matriz es triangular

  $|A| = (x-2).(x-2).x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow \text{La matriz } A \text{ es inversa para } x \in \Re / x \neq 0 \text{ y } x \neq 2$

- ***Hallar la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial: A .Y + B = I siendo A la matriz anterior para x = 3, I la matriz unidad y B es la matriz*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

$$AY + B = I \Rightarrow AY = I - B \Rightarrow Y = A^{-1}\left(I - B\right)$$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \left[A^{adj}\right]^{t} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

24- *Demuestra, sin desarrollar, que el valor del determinante* $\begin{vmatrix} n & n+13 & n+31 \\ n+7 & n+19 & n+28 \\ n+12 & n+25 & n+52 \end{vmatrix}$ ***es múltiplo de 9*** $\forall n \in N$**.**

Haciendo $C_3 = C_3 - C_2$

$$\begin{vmatrix} n & n+13 & 18 \\ n+7 & n+19 & 9 \\ n+12 & n+25 & 27 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} n & n+13 & 2 \\ n+7 & n+19 & 1 \\ n+12 & n+25 & 3 \end{vmatrix}$$ lo cuál indica que es múltiplo de 9

25- De una matriz cuadrada A se sabe que admite inversa. ¿Qué se puede afirmar del determinante de A? ¿Y del rango de A ? Razona la respuesta.

Ver problema nº 20

26- *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$***, estudiar la existencia de su inversa según los valores del parámetro a y hallar la inversa para a = 2.***

Lo primero que tenemos que hacer es hallar $|A|$ y verificar que es distinto de 0

$|A| = -a^2 + 1$

$a^2 = 1 \Rightarrow$ a = 1 ; a = -1

Estos dos valores son los que hacen el determinante = 0, por lo tanto existe la inversa para todos los valores de a excepto 1 y -1

En el 2º apartado nos pide hallar la inversa para a = 2. Lo 1º que hay que hacer es sustituir a por 2 en la matriz y hallar el determinante

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1-2-1-4+1 = -3$; Ahora hay que hallar la adjunta

$A^{adj} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Nota*: recordar cambiar el signo de los adjuntos a_{12}, a_{21}, a_{23} y a_{32}

El siguiente paso es hallar la traspuesta de la adjunta $\left[A^{adj}\right]^{t} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Por último la inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

27- Consideramos matrices A y B de orden 2x2 con |A |= 2 y |B| = -4. Calcular, justificando la respuesta, rango de A, rango de B, $|A^2|$, |-A |, $|A^{-1}|$, |2A|, $|AB^t|$, $|B^tA|$.

- El rango de la matriz *A* será; *r (A) = 2*, ya que su determinante es distinto de 0.
- El rango de la matriz *B* será; *r (B) = 2*, ya que su determinante es distinto de 0.
- $\left|A^2\right| = |A \cdot A| = |2 \cdot 2| = 4$
- $|-A| = |(-1) \cdot A| = (-1)^2 \cdot |2| = 2$
- $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$
- $|2A| = 2^2 \cdot |2| = 4 \cdot 2 = 8$
- $\left|A \cdot B^t\right| = |A| \cdot \left|B^t\right| = |A| \cdot |B| = -8$, ya que en determinantes $|B| = \left|B^t\right|$
- $\left|B^t \cdot A\right| = \left|B^t\right| \cdot |A| = -4 \cdot 2 = -8$

28- **Una matriz cuadrada tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$ donde *I* es la matriz unidad.**

- **Demostrar que *A* admite inversa, y obtenerla en función de *A***

$A^2 = 2A + I \Rightarrow A^2 - 2A = I \Rightarrow A(A - 2I) = I$. Al ser el producto de dos matrices la unidad, podemos afirmar que son inversas, es decir $A^{-1} = A - 2I$

- **Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, hallar para que valores de *m* se verifica que $B^2 = 2B + I$, y para esos valores escribir la matriz inversa de *B*.**

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = 2B + I \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+3 & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a) m = 1 \\ b) m = -1 \end{cases}$$

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

29. Calcula el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ m & -1 & 2 \\ -1 & m & -2m \end{pmatrix}$ ***en función de m.***

Lo primero que tenemos que hacer es hallar el determinante de la matriz: $[M] = m^3 - m^2 - m + 1$

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	R = 0
1		1	1	
	1	1	R = 0	
-1		-1		
	1	R = 0		

Este determinante igualado a cero implica que sea: $m = 1$ y $m = -1$

a) $m \neq \pm 1 \quad \rightarrow \quad r(M)=3$

b) $m = 1 \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$ *r(M)=1 al ser las tres filas proporcionales*

c) $m = -1 \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow r(M)=2$

30- Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & a \end{pmatrix}$***. Calcular en función del parámetro a, las matrices X de la forma*** $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ ***que verifican:*** $A^t.X = A.X^t$

El primer paso sería sustituir en la igualdad que nos da para saber cómo debemos seguir :

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix}$$

Realizamos la multiplicación para obtener ecuaciones que podamos igualar entre sí.

$$\begin{pmatrix} 2x + az & 2y + ax \\ -x + az & -y + ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - x \\ ax + ay & az + ax \end{pmatrix}$$

Dichas ecuaciones igualadas son:

$2x + az = 2x - y \quad ; \quad az + y = 0$

$2y + ax = 2z - x \quad ; \quad (a+1)\, x + 2y - 2z = 0$

$-x + az = ax + ay \quad ; \quad -(a+1)x - ay + az = 0$

$-y + ax = az + ax \quad ; -y - az = 0$

Al ser iguales la primera y la cuarta ecuación, nos deshacemos de una de ellas, quedándonos por tanto:

$y + az = 0$

$(a+1)\, x + 2y - 2z = 0$

$(-a -1)x - ay + az = 0$

Con ello , y repasando la teoría que Toño tanto nos repite, sabremos que es un sistema homogéneo ya que los términos independientes son 0, y siempre tienen solución y siempre son compatibles ya que, al menos, existe la solución trivial.

Para calcular los valores de a, y actuar en consecuencia, hallamos el determinante de ese sistema homogéneo que antes obtuvimos.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ a+1 & 2 & -2 \\ -a-1 & -a & a \end{vmatrix} = 0 +2 a \ +2 - a^3 - a^2 + 2a - a^2 - a = -a^3 + 3 a + 2 \ ; -a^3 + 3 a + 2 = 0$$

Al resolver esta ecuación de tercer grado nos quedan como soluciones : a = -1 y a = 2

Discusión del sistema por el Teorema de Rouché – Fröbenius:

* Siempre que a no sea ni -1 ni 2 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ya que el sistema es homogéneo, esta es la llamada solución trivial.

* Cuando $a = -1$ el sistema de ecuaciones pasa a ser:

$y - z = 0$

$2y - 2z = 0$

$y - z = 0$

Al ser todas las ecuaciones iguales, deducimos que $y = z$, lo que implica que $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ para todo λ y todo μ pertenecientes a los números reales.

* Cuando a = 2

Los sistemas serán:

$y + 2z = 0$

$3x + 2y - 2z = 0$

$-3x - 2y + 2z = 0$

De ahí sacamos que: $y = -2z$ y $3x+6z=0; x = 2z$. Lo que implica que: $X = \begin{pmatrix} 2z & -2z \\ z & 2z \end{pmatrix}$

Y así, y por fin , acabasteis el problema! ¡Suerte con los demás!

31- Sea A una matriz cuadrada de orden dos verificando que $2.A^2 = A$. Calcula razonadamente los valores del determinante de A.

Solución: $|2A^2| = |A| \Rightarrow 2^2 . |A^2| = |A| \Rightarrow 4|A|.|A| = |A|$, si llamamos x a $|A| \Rightarrow$

$$4x^2 = x \Rightarrow 4x^2 - x = 0 \Rightarrow x(4x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

32- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar para qué valores de m la matriz $B + mA$ no tiene inversa.

Solución : Sustituimos la expresión $B+mA$ por sus matrices correspondientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la matriz A por m:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos las dos matrices y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{pmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2+0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{vmatrix} = 2(3+m) - [(1+m)(2+2m)] = 6 + 2m - 2m^2 - 4m - 2 = -2m^2 - 2m + 4$$

Para que no exista la matriz inversa el determinante de esta tiene que ser 0 por lo que hacemos la expresión anterior igual a 0 y hallamos los valores que hacen que $m=0$

$$-2m^2 - 2m + 4 = 0 \text{ Dividimos toda la ecuación entre - 2.}$$

$$\mathrm{m}^2 + \mathrm{m} - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)1}}{2.1} \Rightarrow m = 1, m = -2$$

33- *Si los determinantes de las matrices cuadradas de orden tres son A y 2A iguales, calcular el determinante de A. ¿Existe la matriz inversa de A?*

Si $|A| = |2A| \Rightarrow |A| = 2^3|A| \Rightarrow |A| = 8|A| \Rightarrow |A| = 0$. No existe por lo tanto matriz inversa.

34- *Sean A,B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación* $A.X.B = I$*, siendo I la matriz unidad.*

a. *Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcula razonadamente el determinante de X.*

Solución: $| I | = 1$; $A\,X\,B = I \Rightarrow |A|.|X|.|B| = | I | \Rightarrow -1.\ |X|.1 = 1 \Rightarrow |X| = -1$

b. *Calcular de forma razonada la matriz X si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución: $A\,X\,B = I \Rightarrow A^{-1}\,A\,X\,B = A^{-1}\,I \Rightarrow X\,B = A^{-1} \Rightarrow X\,B\,B^{-1} = A^{-1}\,I\,B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\,B^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

35- *Calcular razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:*

$$A.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos A: $A.M = 2I \Rightarrow A = 2I.M^{-1} \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

36- *Encontrar todas las matrices* $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ ***que verifiquen la igualdad*** $C.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.C$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+1 & 3 \\ b+2 & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b-5 & 3-5a \\ 6b-8 & 6-8a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Cuando ya hemos sustituido C, procedemos a multiplicar las matrices, y como has estudiado mucho, sabrás porque te quedarán las siguientes ecuaciones:

$1 + 2a = -5 + 3b$

$3 = -5a + 3$

$b + 1 = -8 + 6b$

$3b = -8a + 6$

Si te das cuenta, ahora solo tienes que despejar las ecuaciones que has obtenido, para hallar el valor de *a* y *b* de la matriz *C:*

$3 = -5a + 3 \quad \Rightarrow 5a = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$

$2a - 3b + 6 = 0 \;\Rightarrow\; -3b + 6 = 0 \;\Rightarrow\; b = 2$

$-5b + 10 = 0 \;\Rightarrow\; b = 2$

$3b + 8a - 6 = 0 \;\Rightarrow\; b = 2$

La matriz pedida es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

37- *Calcular el rango de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: Para hallar el rango de la matriz M hallamos su determinante a partir de sus adjuntos:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$|M| = -22-0+11+7 = -4 \neq 0 \rightarrow$ **<u>r(M) = 4</u>**

* (no está mal, pero intenta resolver el problema por Gauss o al menos hacer algún cero más)

38- *Sean A y B matrices cuadradas con* $|A| = 2$ y $|B| = 3$**. *Razonar cuánto vale el determinante de la matriz*** $B^{-1}.A.B$

$$\left|B^{-1}.A.B\right| = \left|B^{-1}\right|.|A|.|B| = \frac{1}{3}.2.3 = 2$$

39- *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & m \end{pmatrix}$**, *determinar para que valores de m existe*** A^{-1}**. *Para m = -1 resolver*** $\left|A^{-1} - xI\right| = 0$ ***siendo I la matriz unidad.***

$|A| = -m + 0 + 0 + 2 + 0 + m \Rightarrow |A| = 2$ tiene inversa $\forall m \in R$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(A^{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left|A^{-1}-xI\right|=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-x & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}-x & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -x \end{pmatrix}$$ cuyo determinante es

$\frac{(x+1)(1-2x^2)}{2}$, al igualarlo a cero $\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=-1$

40- Si A es una matriz de orden n tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, calcula B^2.

$B^2 = B.B \Rightarrow B^2 = (2A-I).(2A-I) = 4A^2-2A-2A+I = 4A-4A+I = I$

$\underline{B^2=I}$

41- Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$***, hállese la matriz B sabiendo que:***

$P^{-1}.B.P = A$

Solución: Primero calculamos la inversa de la matriz P. Para ello, debemos calcular la transpuesta de su adjunta.

$$P^{adj}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{adj^t}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por P^{-1} por la derecha, y por P por la izquierda:

$$P.P^{-1}.B.P.P^{-1} = P.A.P^{-1} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

42- Sea A una matriz cuadrada cuyo determinante vale 3, y sea la matriz $B=\sqrt[4]{3}A$. Calcúlese el determinante de B.

$$\left|A_{n\times n}\right| = 3 \Rightarrow |B| = \left|\sqrt[4]{3}A\right| = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^n |A| = 3^{\frac{n}{4}}.3 = 3^{\frac{n+4}{4}}$$

43- Se tiene una matriz cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C1, C2 y C3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son –C2, C3+C2, 3C1. Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en el caso de que exista esa matriz.

$\left|-C2,C3+C2,3C1\right| = \left|-C2,C3,3C1\right| + \left|-C2,C2,3C1\right|$ La 2ª columna esta formada por dos sumandos y descomponemos el determinante en suma de dos, el 2º de los cuales es cero por tener dos columnas proporcionales.

$\left|-C2,C3,3C1\right| = (-1)(3)\left|C2,C3,C1\right|$, intercambiamos ahora *C1* con *C3* y después con *C2*, con lo que el determinante cambia dos veces de signo (queda igual). El determinante de *A* es *(-1).(3).(2) = -6,* y el de su inversa $-\dfrac{1}{6}$

44- Dada la matriz $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$***, hállese una matriz X que verifique la ecuación XB+B = B***$^{-1}$***.***

Lo primero que hacemos es dejar la incógnita a un lado de la ecuación:

$$X\cdot B + B = B^{-1} \Rightarrow X\cdot B = B^{-1} - B$$

Ahora multiplicamos los dos miembros de la ecuación por B^{-1}:

$$X\cdot B\cdot B^{-1} = (B^{-1} - B)\cdot B^{-1} \Rightarrow \quad X = (B^{-1})^2 - I$$

El siguiente paso es hacer la inversa de *B=1/3* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

- Hallamos el determinante: $|B| = 4/9 - (-1/9) =$ 5/9
- Hallamos la adjunta: $B^{adj} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Y por lo tanto la inversa sería: $B^{-1} = 9/5\cdot\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \dfrac{9}{5}.\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3/5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \Rightarrow$

$$(B^{-1})^2 = 3/5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot 3/5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{9}{25}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 27/25 & -36/25 \\ 36/25 & 27/25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/25 & 36/25 \\ 36/25 & 2/25 \end{pmatrix}$$

45- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$***,*** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$***, hállense las matrices X que satisfacen*** $XC + A = C + A^2$***.***

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A$$

$$XC + A = C + A^2 \Rightarrow \quad X.C + A = C + A \Rightarrow$$

$$XC = C \Rightarrow multiplicando\ \ por\ \ C^{-1}\ \ en\ ambos\, miembros:$$

$$X.C.C^{-1} = C.C^{-1} = I \Rightarrow X = I$$

Otra forma más complicada

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2b+3c & b+2c & c \\ d+2e+3f & e+2f & f \\ h+2i+3j & i+2j & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a=1 & b=0 & c=0 \\ d=0 & e=1 & f=o \\ h=0 & i=0 & j=1 \end{matrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X\, es\, igual\, a\, la\, matriz\, identidad\, \boldsymbol{(}\, I\, \boldsymbol{)}$$

46- Sea A una matriz 2×2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2×2 de determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicando propiedades de los determinantes

$$|C| = |C_1 + C_2, 3C_2| = |C_1, 3C_2| + |C_2, 3C_2| \Rightarrow$$

$$|C| = 3|C_1, C_2| + 0 \;\; (\, 2 \;\; columnas \;\; proprorcionales\,)$$

$$|C| = 3\,|A| = 3.4 = 12 \Rightarrow |C^{-1}| = \frac{1}{12} \Rightarrow |B.C^{-1}| = 2\, .\, \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

47- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de A sabiendo que $A^2 - 2A + \mathrm{Id} = 0$, donde Id es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\!\rightarrow\!; \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \;;\!\rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0 \;;\!\rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow ab + bc - 2b + 0 = 0 ;\!\rightarrow 0 = 0 ;\!\rightarrow b \in \Re$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1;$$

Otra forma : Por ser A e I dos matrices que conmutan $A^2 - 2A + \mathrm{Id} = 0 \Rightarrow (\, A - I\,)^2 = 0 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\, a-1\,)^2 & (\, a-1\,)b - b \\ 0 & (\, c-1\,)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, resolviendo quedan las mismas soluciones

48- Discútase, según el valor de a, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Solución:

$$|A| = a+2-4a-3 = -3a-1 \;\Rightarrow\; -3a-1=0 \;\Rightarrow\; a=-\frac{1}{3}$$

$$\left.a \neq -\frac{1}{3}\right\} \text{ Rango (A) = 3 si } a=-\frac{1}{3} \text{ Rango (A) = 2}$$

49- Sea $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$. Determínense los valores de m para los cuales $A+m.I$ no es invertible (donde I denota la matriz identidad).

A lo que se refiere el problema es que hallemos el/los valores de *m* para que al sumar A mas el producto de I por *m* la matriz resultado no sea invertible, o sea que su determinante sea 0

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}+m.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+1&2\\2&m+3\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}m+1&2\\2&m+3\end{vmatrix}=0=(m+1)(m+3)-4\Rightarrow\begin{cases}m=-2+\sqrt{5}\\m=-2-\sqrt{5}\end{cases}$$

50- Hállense las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:

$$A\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A.$$

Solución

Sea $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$. La ecuación anterior puede escribirse: $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$.

Multiplicando obtenemos el sistema: $\begin{cases}x+y=x\\y=y\\z+t=x+z\\t=y+t\end{cases}$ del cual *y = 0 ; x = t ;z* puede tomar cualquier valor real. La matriz A es $\begin{pmatrix}x&0\\z&x\end{pmatrix}\;\forall x,z\in\mathbb{R}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .-

1.-Discute y resuelve:

$$\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+3y+4z=0\\3x+4y+5z=0\end{cases}$$

Es un sistema homogéneo porque los términos independientes son 0.

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{matrix}}_{M}\;\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)}_{A}$$

$$|M| = 15+24+24-27-16-20=0$$

r(M) = r(A) = 2

El determinante de esta matriz sabemos que es 0 porque si vamos restando la segunda columna de la tercera y la primera de la segunda vemos que las dos últimas columnas nos quedan de unos. Y cuando una matriz tiene dos de sus columnas iguales el determinante vale 0.

de orden n (que en este caso es 3x3) es igual a 0, por lo tanto sabemos que no es de rango 3.
Si seguimos realizando los determinantes de las submatrices de orden 2 que hay en el determinante, nos encontramos con que la primera de ellas es distinta de 0, con lo cual, ya sabemos que la matriz M es de rango 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Como el rango de M no coincide con el número de incógnitas, sabemos que estamos ante un Sistema Compatible Indeterminado.

n (número de incógnitas) – r (rango de la matriz M) = 3 – 2 = 1

Ponemos ahora todas las incógnitas en función de ***n – r***:

$$\begin{cases} x + 2y = -3\lambda \\ 2x + 3y = -4\lambda \end{cases} \qquad z = \lambda$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -2x - 4y = 6\lambda \\ 2x + 3y = -4\lambda \end{cases}$$

$$\overline{\quad 0 \quad -y = \quad 2\lambda \quad}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \quad \forall \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$x = -3\lambda - 2 \cdot (-2\lambda) = \lambda$$

2.- Discute y resuelve, si es posible, el sistemaa: $\begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x + 5y - z = 4 \\ -4x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$

Ponemos el sistema en forma matricial $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$; Hallamos el determinante de M, que es la matriz de orden 3

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -45 + 4 - 4 + 40 + 6 - 3 = -2 \Rightarrow r(M) = 3; r(A) = 3; n = 3 \Rightarrow SCD$$

Usando Cramer, hallamos x, y, z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{15 + 1 - 16 + 10 - 2 - 12}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-36 + 4 - 2 + 32 - 3 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow y = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{15 - 16 - 2 + 20 - 24 + 1}{-2} = \frac{-6}{-2} \Rightarrow z = 3$$

3.- Discutir y resolver, si es posible, el sistema $\begin{cases} (k+2)x + (k+3)y = 6 \\ (3k+1)x + 3ky = 4 \end{cases}$

Sistema en forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k+3 & 6 \\ 3k+1 & 3k & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} k+2 & k+3 \\ 3k+1 & 3k \end{pmatrix}$$

Cálculo de los rangos de las matrices para poder discutirlas.

Miramos los valores de k q igualan M=0, de esa manera, el r(M)=1

$$\begin{vmatrix} k+2 & k+3 \\ 3k+1 & 3k \end{vmatrix} = 3k(k+2) - ((3k+1)\cdot(k+3)) = 3k^2 + 6k - 3k^2 - 9k - k - 3 = -4k - 3$$

Para que el determinante de M sea $0, -4k-3=0; k=-\frac{3}{4}$

Casos de estudio: Discusión

$$k \neq -\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} r(M)=2 \\ r(A)=2 \\ n=2 \end{matrix}\right\}$$ Es un Sistema Compatible Determinado; *r(A) = r(M)= n*

$$k = -\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} r(M)=1 \\ r(A)=2 \\ n=2 \end{matrix}\right\}$$ Es un sistema Incompatible; *r(M) < r(A)*

Sabemos *que r(A) =2 en k = -3/4* porque

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{9}{4} & 6 \\ -\frac{9}{4} & 4 \end{vmatrix} = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2} \neq 0$$

Resolución Lo hacemos por Cramer en función del valor de *k*, siempre que no sea *k = -3/4*

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 6 & k+3 \\ 4 & 3k \end{vmatrix}}{-4k-3} = \frac{18k-4k-12}{-4k-3} = \frac{14k-12}{-4k-3} \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & 6 \\ 3k+1 & 4 \end{vmatrix}}{-4k-3} = \frac{4k+8-18k-6}{-4k-3} = \frac{-14k+2}{-4k-3}$$

4.- Discútase el sistema en función del valor de a : $\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$

En primer lugar expresamos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de M, matriz de orden 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3a^2 - 2a - 2 + 3 + 2a - a^2 - a = 2a^2 - a \quad \begin{matrix} a(2a-1)=0 \rightarrow a=0 \\ 2a-1=0, 2a=1, a=1/2 \end{matrix}$$

Aquí aparecen 3 opciones

1: $a \neq 0, \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{cases} r(M)=3 \\ r(A)=3 \\ n=3 \end{cases}\right\} SCD$

2: $a=0 \Rightarrow r(M)=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1=-3 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow SI$$

3: $a = \frac{1}{2} \Rightarrow r(M) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to |A_2| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} - 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow SI$$

b) Para el valor a=1, hállese, si procede, la solución del sistema:

$a = 1 \Rightarrow SCD$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+3-4+3+2-2=1$$

Aquí aplicamos Cramer y hallamos x, y, z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -2-4 \Rightarrow x = -6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 6+4 \Rightarrow y = 10$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 8-6 \Rightarrow z = 2$$

5.- Discute y resuelve el siguiente sistema $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$

Discusión del sistema:

1º Planteo la matriz correspondiente al sistema:

(M)= $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{array}\right)$, distinguiendo las tres primeras columnas como la Matriz M, y el conjunto de la Matriz M con la ampliación de la ultima columna, como la Matriz ampliada A.

2º Hallo el determinante de la Matriz M, para poder obtener el rango:

$|M| = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{array}\right|$ = -2m - 3 + 3m – 4 => |M|= m – 7

3º Conocido el determinante de M, deduzco que:

a) Cuando *m≠7 → r(M) =3,* ya que el rango se define como el orden del menor mayor de una matriz cuyo determinante sea distinto de 0.
   Así, el r(A) también será 3, porque la Matriz M, es un menor de la Matriz A.

Dado que el número de incógnitas, n, es 3; podemos llegar a la conclusión de que es un **sistema compatible determinado**: r(M)=r(A)=n *(Teorema de Rouché).*

b) Sustituimos el valor de m=7 en la matriz inicial:

M= $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right)$ y hallamos el determinante de un menor para calcular el rango (el determinante de esta matriz da 0, según lo calculado anteriormente).

Mediante el menor $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$≠0, podemos determinar que el r(M)=2, cuando m=7.

Para hallar el r(A), tomaremos el menor, cuyo determinante ≠0 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix}$≠0, conociendo así el r(A)=3.

Si r(M) ≠ r(A), podemos afirmar que para m=7, el **sistema es incompatible** (*Teorema Rouché).*

Resolución del sistema compatible determinado, mediante la Regla de Cramer, que consiste en sustituir la columna de la matriz donde se halla la incógnita a despejar, por la matriz del término independiente, hallar el determinante de ésa matriz resultante y dividirlo por el determinante de la matriz inicial:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-3m}{m-7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-2m}{m-7} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{m}{m-7}$$

Para m=7 es un sistema incompatible, por lo que no tiene solución.

6.- Discute y resuelve $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 3x+ay+az=5 \\ 4x+ay=5 \end{array}\right\}$

Primero extraemos la matriz de los coeficientes y la ampliada.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & a & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A}$$

Hallamos el determinante de M $|M| = -a^2 + 5a$

Lo igualamos a cero para conocer los valores de a para los que $|M|$ es cero;

$-a^2 + 5a = 0 \Rightarrow a = 0 \ a = 5$

- Si $a \neq 0 \ y \, a \neq 5$

$|M| \neq 0 \, ; r(M) = 3, \ r(A) = 3; n = 3 \Rightarrow S.C.D.$ Las soluciones son: $x = 1 \ ; \ y = \frac{1}{a} \ ; \ z = \frac{1}{a}$

- Si $a = 0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A}$$

$|M| = 0; r(M) = 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$r(A) = 3; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

$r(M) = 2, \ r(A) = 3 \Rightarrow S.I.$

- Si $a = 5$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A}$$

$|M| = 0; \ r(M) = 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

$r(A) = 2;$ ya que los menores de orden tres se anulan.

$r(M) = 2; \ r(A) = 2, n = 3 \Rightarrow S.C.I$ Resolvemos en función de 3 incógnitas- 2 rango común, 1 parámetro (reducción)

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 3x+5y+5z=5 \end{array}\right\} \quad z=\lambda; \quad \begin{array}{c} (-3) \\ (1) \\ \end{array} \left.\begin{array}{r} -3x+-3y+3\lambda=-3 \\ 3x+5y+5\lambda=5 \\ \hline 0+2y+8\lambda=2 \Rightarrow \end{array}\right\} y=1-4\lambda \ ;$$

$$\left.\begin{array}{r} (-5);-5x-5y+5\lambda=-5 \\ (1);3x+5y+5\lambda=5 \\ \hline -2x+0+10\lambda=0 \Rightarrow \end{array}\right\} x=5\lambda$$

7.-Discutir y resolver: $\left\{\begin{array}{llll} ax & +2y & +2z & =5a \\ 3x & -2y & -2z & =-1 \\ -x & +3y & +az & =3 \end{array}\right.$

Solución:

Lo primero que hay que hace es poner el sistema en forma matricial:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 & 5a \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que calcular los rangos de estas dos matrices por lo que miramos los valores que harían 0 el determinante de M, de esta forma sabemos que todos los valores de a menos dichos valores son los que hacen su rango 3.

$|M|=-2a^2+18+4-4+6a-6a$. Igualando a cero y despejando la ecuación nos queda que $a=\pm 3$ luego el determinante de M será distintos de 0 y su rango será 3. El rango de A en este caso también será 3 al tener sólo 3 filas, y por lo tanto será un **sistema compatible** (A y M tienen mismo rango) **determinado** (hay mismo numero de incógnitas que de ecuaciones).

- Para $a=-3$

  $$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix};\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

  Ya sabemos que el determinante de M nos dará cero por lo que su rango no podrá ser tres en este caso es dos ya que cogiendo los valores $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante nos da 7 es decir distinto de 0 por lo que el rango de M será *2*.

  Ahora tenemos que calcular el rango de A para ello tenemos tres opciones distintas dependiendo por quien sustituyamos la columna de los términos independientes.

  Yo voy a coger una completamente al azar: Como por ejemplo: $\begin{vmatrix} -15 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ cuyo determinante es: $-90-6-12+12-90-6=-192$,es decir distinto de 0 por lo que el rango de A es 3 (si nos hubiese dado cero deberíamos intentar con las otras dos opciones y comprobar que ambas daban 0 porque con que solo haya una ya el rango es 3).

  De todo esto concluimos que los rangos de M y A son distintos por lo que este sistema para $a=-3$ es un **sistema incompatible.**

- Para $a=3$

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como ocurre en el caso anterior ya sabemos que el rango de M no puede ser 3 por lo que como mucho el rango de M será 2 como de hecho es si cogemos $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es 7 , como ya se habrán dado cuenta los mas avispados.
Bien ahora tenemos que calcular el rango de A para lo que aplicamos las mismas reglas que la vez anterior yo he cogido esta matriz "al azar" $\begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es

$$-9+18+30-2+18-135=-80$$

Luego el rango de A es 3 distinto del de M que es 2 por lo que el **sistema es incompatible**.

8.- $\begin{cases} x & +y & & =1 \\ & my+ & z & =0 \\ x & +(1+m)y & +mz & =m+1 \end{cases}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = m^2 - m = m(m-1)\ ;m(m-1)=0 \Rightarrow \quad m=0,\, m=1$$

$1)\ m \neq 0 m \neq 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix} \quad r(M)=3\ \ r(A)=3\ \ n=3 \quad es\,un\,sist.compatible\,det. \to Cramer$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & 1+m & m \end{vmatrix}}{m^2-m} = \frac{m^2}{m^2-m} = \frac{m}{m-1}\ ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2-m} = \frac{m}{m^2-m} = \frac{1}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1+m & m+1 \end{vmatrix}}{m^2} = \frac{m^2+m-m}{m^2-m} = \frac{m^2}{m^2-m} = \frac{m}{m-1}$$

$2)\ m=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |M|=0;\ r(M)\neq 3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r(M)=2\ ;\ n=3$$

$$r(A)\ hay\,3\,posibilidades \quad 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;\ r(A)\neq 3$$

tomamos el mismo determinante de orden 2 de antes, por lo que $r(A)=2 \qquad 3-2=1$

;tendremos que dejarlo todo en función de un parámetro SISTEMA COMPATIBLE INDET.

$y = 1-\lambda$

$z = 0 \qquad \forall \lambda \in \Re$

$x = \lambda$

$3)\, m=1 \quad |M|=0$ *Es un sistema incompatible*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |C_1\,C_2\,C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;\ |C_1\,C_3\,C_4| = \dots\ ;|C_2\,C_3\,C_4| = \dots.;\ \ r(M)=2 \ \ r(A)=3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

9.- Resolver y discutir el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & ky & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & kz & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

La matriz del sistema es $M=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & -k \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -k & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|M|$ = $-1-2k^2+3+2-k+3k = -2k^2+2k+4$

Entonces: $|M|$ = 0 si y sólo si k = -1, ó k = 2, luego:

Si k≠-1, y k≠2 entonces $|M| \neq 0$ y el rango de *M* es 3, luego el sistema es compatible determinado, y sus soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{k} & 1 \\ 3 & -1 & -\mathrm{k} \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|\mathrm{M}|} = \frac{-k^2-3k+8}{|M|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -\mathrm{k} \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|\mathrm{M}|} = \frac{k-2}{|M|}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{k} & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|\mathrm{M}|} = \frac{5k-8}{|M|}$$

Si k=-1 el sistema es: $\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}\ r(M)=2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$; el *r(A)=3* ya que cualquier menor de orden 3 que escojamos es distinto de cero . Sistema *INCOMPATIBLE*

Si k=2 el sistema es: $\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$

y considerando que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, el rango de A es 2 y el sistema es *COMPATIBLE INDETERMINADO*.

10.- $\begin{cases} 2x & -3y & & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \\ x & +2y & +mz & = m \end{cases}$

Solución: $|M| = m - 7 \; ; \; m = 7$

1) $m \neq 7 \rightarrow r(M) = 3 = r(A) = n^{o}$ *de incógnitas* $\rightarrow$ *SIST. COMP. DETERMINADO*

Resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-3m}{m-7} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-2m}{m-7} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{m}{m-7}$$

2) $m = 7$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ $|M| = 0 \rightarrow r(M) \neq 3$;*Cogemos un menor* $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(M) = 2$

r(A): $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 3 \;\; r(M) \neq r(A) \rightarrow$ *SISTEMA INCOMPATIBLE*

11.- Discute y resuelve $\begin{cases} 2x & -my & +z & = 2-m \\ x & +2y+ & z & = 0 \\ 3x & & +2z & = 2-m \\ (m+2)x & +2y & +3z & = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_3 = F_3 - F_1 ; |A| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(2-m)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m+2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = C_1 - C_3 \Rightarrow -(2-m)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ m-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(2-m)(m-1)(2-m) = -(2-m)^2(m-1)$$

Estudio:

a) $m \neq 1$ $r(A)=4$
   $m \neq 2$ $r(M)<4$ Sistema Incompatible

b) $m=1$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

r(M)=3
r(A)=3 Sistema Compatible Determinado
3 incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{array}\right\} x = \frac{1-2z}{3}; \frac{1-2z}{3} + 2y + z = 0; 1 - 2z + 6y + 3z = 0; y = \frac{-z-1}{6};$$

$$2\left(\frac{1-2z}{3}\right) - 1\left(\frac{-z-1}{6}\right) + z = 1; 4 - 8z + z + 1 + 6z = 6; z = -1$$

$$x = \frac{1+2}{3} = 1; x = 1$$

$$y = \frac{1-1}{6} = 0; y = 0$$

$$x = 1; y = 0; z = -1$$

c)m=2 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; F_4 = F_1 + F_2; F_3 = F_1 + F_2$

r(M)=2 , r(A)=2 Sistema Compatible Indeterminado (3 incógnitas)

$z = \lambda$

$x + 2y = -\lambda$

$2x - 2y = -\lambda$

$\forall \lambda \in R$

12- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema con cuatro ecuaciones y tres incógnitas, si tiene las soluciones (1,-1,1) y (-1,1,0)?

Si hay más de una solución el sistema es Comp. Indeterminado por lo que el rango de la matriz de los coeficientes tienen que ser igual al de la matriz ampliada y menor que el nº de incógnitas (3).

b) ¿El conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede ser el mismo que el de un sistema con cuatro ecuaciones y tres incógnitas? ¿ Y que el de un sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas?

En el primer caso no es el mismo conjunto solución dado que en el segundo sistema de ecuaciones lineales hay una incógnita más que en el primero. En el segundo caso si puede ser el mismo conjunto solución dado que hay igual número de incógnitas y la ecuación sobrante puede ser combinación lineal de las otras.

c) Un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas ¿puede tener solución única?

No. Será compatible indeterminado ya que al menos tres incógnitas dependen de una cuarta.

d) Si un sistema de cuatro ecuaciones lineales tiene las soluciones (1,2,3) y (-1,2,-3) ¿ se puede asegurar que es compatible determinado?

Si tiene más de una solución, tiene infinitas y será compatible indeterminado.

13- De los siguientes sistemas analiza la compatibilidad y resuelve los que sean determinados:

$$\left\{\begin{array}{llll} 8x & +y & +4z & =9 \\ 5x & -2y+ & 4z & =6 \\ x & +y & & =1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{llll} 6x & -y & -3z & =1 \\ -6x & +8y & & =5 \\ 2x & -5y & -5z & =5 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ 3x & -4y & & =5 \\ 7x & -y & -3z & =8 \end{array}\right.$$

a) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |M| = 0 + 4+ 20+ 8 –32 –0 = 0

M

A

r(M)=2

Si el determinante de la matriz de orden 3 es igual a 0, entonces su rango es 2 no tiene tampoco combinaciones lineales ⇒

$$r(A):\ \begin{vmatrix} 8 & 4 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 32+24+0-36-0-20=0 \Rightarrow r(A)=2$$

r(M)=2 ; r(A)=2; n=3 Sist. Compatible indeterminado ⇒ *n-r = 3-2 =1*

b) $$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}_{M}}_{A}$$

|M|= -240+0-90+48-30-0= -312 ⇒|M| distinto de 0 ⇒ r(M)= 3

$$r(A):\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0-30+30-0-90+150= 60\ [\text{distinto de } 0]\ r(A)=3$$

r(*M)=3 ;r(A)=3 n=3:* **Sist. compatible determinado:**

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & -5 \end{vmatrix}}{-312}=\boxed{\frac{-65}{126}}\quad x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -6 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{-312}=\boxed{\frac{5}{21}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -6 & 8 & 5 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{-312}=\boxed{\frac{-13}{9}}$$

c) $$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}}_{M}}_{A}$$

|M|= 12+0-3+28+9+0=46 ⇒ |M| distinto de 0 ⇒ r(M)=3

$$r(A):\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow |A| \text{ distinto de } 0 \Rightarrow r(A)=3$$

r(M)= 3r(A)= 3 n = 3 **Sist. Comp. Determinado:**

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{46}=\boxed{\frac{27}{23}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{46}=\boxed{\frac{-17}{46}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{46}=\boxed{\frac{9}{46}}$$

14- Halla para que valores del parámetro m no es posible aplicar la regla de Cramer al sistema:

$$\begin{cases} x+my+(m+1)z=m+2 \\ 2x+(m+1)y=3m+6 \\ -x+(m+1)y+(m+1)z=0 \end{cases}$$

Para aplicar Cramer tenemos que comprobar que el número de ecuaciones y el de incógnitas sea el mismo y que el determinante de la matriz de los coeficientes sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m+1 \\ 2 & m+1 & 0 \\ -1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \rightarrow Hacemos\ (m+1)=k \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m & k \\ 2 & k & 0 \\ -1 & k & k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & k & 0 \\ -1 & k & 1 \end{vmatrix} = 4k^2-2km = 2k(2k-m) =$$

$$(2m+2)(2m+2-m) = 2m^2+6m+4 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-2 \end{cases}$$

15- Consideramos el sistema $\begin{cases} ax+y-z=a \\ 2x+(1+a)y+az=0 \\ (a-4)x-(2a+1)y-(2a+1)z=0 \end{cases}$

- ***Demostrar que nunca puede ser compatible determinado***
- ***Calcular los valores de a para los que es incompatible***
- ***Calcular los valores de a para los que es compatible indeterminado***

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.(Cramer)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & (1+a) & a \\ (a-4) & -(2a+1) & -(2a+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{C2=C2-C3} \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ (a-4) & 0 & -(2a+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{F1=F1-2F2} \begin{vmatrix} a-4 & 0 & -1-2a \\ 2 & 1 & a \\ a-4 & 0 & -1-2a \end{vmatrix} = 0$$

por tener dos filas iguales. El sistema ***nunca puede ser compatible determinado.***

Será ***incompatible*** si el *r(A)* no coincide con el *r(M)*. Calculamos los menores de orden tres de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 2 & (1+a) & 0 \\ (a-4) & -(2a+1) & 0 \end{vmatrix} = -a(a-1)(a+2); \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a-4 & -(2a+1) & 0 \end{vmatrix} = a(a^2+2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1+a & a & 0 \\ -(2a+1) & -(2a+1) & 0 \end{vmatrix} = -a(2a+1)$$

Para que el r(A) sea 3, basta con que un solo menor de los anteriores sea distinto de cero, es decir

$a \neq 0,1,-2$ o $a \neq 0$ o $a \neq 0,\frac{1}{2}$

Para que sea ***compatible indeterminado*** los tres menores anteriores han de ser simultáneamente $0 \Rightarrow a=0$

16- Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ x & +ay & +3z & =2 \\ 2x & +(2+a)y & +6z & =3 \end{cases}$ ***, discútelo.***

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1º Calculamos el determinante de M; una vez hallado nos da de resultado 0 para cualquier valor de *"a"*. Por tanto hemos demostrado que la matriz no es de rango 3.

2º Escogemos una matriz cuadrada *2x2* cuyo determinante nos de distinto de 0. $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ La matriz escogida N tiene como determinante: $|N| = a - 2$, por lo tanto $r|M| = 2$ si $a \neq 2$

- Teniendo en cuenta que las columnas 1 y 3 de la matriz A son proporcionales, el único menor que podría ser distinto de cero es el formado por *(C1,C2,C4)*, siendo su determinante $|A| = 0$.

Es decir, el rango de A como no puede ser menor que el de M es también 2 para cualquier valor de *"a"*, Al coincidir los rangos de *M* y de *A* y ser éste menor que el nº de incógnitas, el sistema será siempre compatible indeterminado

- Para $a = 2$ las tres columnas de *M* son proporcionales por lo que $r(M)=1$ y el $r(A)=2$. Sistema Incompatible.

17- a) **Discútase el sistema** $\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$ **, en función del valor de *a*.**

b) Para el valor $a = 1$**, hállese, si procede, la solución del sistema.**

18-* S*ea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} .$$

a) Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.

b) Resuélvase el sistema para $k = 2$**.**

1º) Se halla el determinante de M (siendo M la matriz sin los términos independientes) para saber las incógnitas

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \\ & & & \end{pmatrix} |M| = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2 (k+2) \text{ ; } k=1 \text{ y } k=-2$$

2º) Se halla el rango de M y de A (siendo A la matriz)en función de $k \neq 1$ *y de* $k \neq -2$

$$\left. \begin{matrix} r(M) = 3 \\ r(A) = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \right\} \text{Sistema Compatible Determinado}$$

3º) Resolver el sistema para k=1 y para k=-2

$$k=1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} r(M) = 1 \\ r(A) = 1 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$k=-2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(M)=2; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Siendo k=2 el sistema se resuelve por CRAMER

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{M} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \right) |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}}{4}=\frac{1}{4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}}{4}=\frac{9}{4}$$

19- - Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$**,** $C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$**,** $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ **y** $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$**.**

a) Hallar la matriz AB^T donde B^T indica la matriz traspuesta de B. ¿Es inversible? (1 punto)

b) Hallar el rango de la matriz $A^T D$. (0,5 puntos)

c) Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que verifique la ecuación $\left(AB^T+C\right)M=E.$

- $A.B^t=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 14 & 4 & -4\\ 21 & 6 & -6\end{pmatrix}$; para que sea inversible su determinante tiene que ser distinto de cero y como $|A|=0$ NO ES INVERSIBLE.
- $A^t.D=(10)$ es una matiz 1×1 distinta de cero. SU RANGO ES 1
- Desarrollando la expresión obtenemos $\begin{pmatrix}7x+2y-2z\\ 14x+5y-4z\\ 21x+6y-7z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$. Igualando elemento a elemento obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas que resolvemos y cuya solución es:

  $M=\begin{pmatrix}6/7\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

20.- Se considera el sistema $\begin{cases}x+y+az=4\\ ax+y-z=0\\ 2x+2y-z=2\end{cases}$, donde *a* es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de *a*. (2 puntos)
b) Resolver el sistema para $a=1$. (1 punto)

$$\text{a)}\ \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & a\\ a & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix}\vdots & 4\\ \vdots & 0\\ \vdots & 2\end{matrix}\right)}_{A}\qquad |M|=2a^2-a-1\ ;\ 2a^2-a-1=0\ ;\ a=\frac{1\pm\sqrt{9}}{a}\Rightarrow x=1;\ x=-1/2$$

1) $a\neq 1;\ a\neq -1/2$

$$\left.\begin{array}{r}r(M)=3\\ r(A)=3\\ n=3\end{array}\right\}\boxed{\text{S.C.D.}}$$

2) $a=1$

$$\left.\begin{array}{l}r(M)=2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0\\ r(A)=2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\,;\quad\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0\\ \quad n=3\end{array}\right\}\boxed{\text{S.C.I.}}$$

3) $a=-1/2$

$$r(M)=2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1/2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$r(A)=3\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1/2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}\neq 0\qquad\boxed{\text{S.I.}}$$

$$n=3$$

b) $a=1$

n - r = parámetros

3 – 2 = 1

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\ x+y-z=0\\ 2x+2y-z=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=\lambda\\ y+z=4-\lambda\\ y-z=-\lambda\end{cases}\quad\begin{cases}x=\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=2\end{cases}$$