

- Dados los vectores $(3, -2, 1)$; $(1, -3, 5)$; $(2, 1, -4)$ del espacio V^3 :
 - Demuestra que forman triángulo
 - Halla el área de dicho triángulo.
 - Calcula los valores de m para que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2m} = \frac{z}{1}$; $s \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -2 - 2t \\ z = -m \end{cases}$ sean paralelas y calcula los vectores directores de r y de s para que sean perpendiculares (si es posible).
 - Demuestra que el triángulo de vértices $(0, 0, 4)$, $(4, 0, 0)$ y $(0, 4, 0)$ es equilátero
 - Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano que contiene al triángulo
 - Calcula la ecuación de una recta que pasa por el origen y es paralela al plano que contiene al triángulo.
 - Dados los vectores $\vec{a}(3, 1, 1)$, $\vec{b}(2, 0, 3)$, $\vec{c}(2, -1, 2)$ calcula la proyección del vector $\vec{a} + \vec{b}$ sobre la dirección de \vec{c} . Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $C(1, 1, 1)$ y es perpendicular e incidente a la recta determinada por los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(2, 1, -1)$.
 - Determina a y b para que los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + 2y + 2z = 1 \\ \pi_2 \equiv x - 2y - 2z = 2 \\ \pi_3 \equiv ax + y + z = b \end{cases}$ se corten en una recta.
 - Calcular la distancia del punto $P(1, 0, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
 - Halla la ecuación del plano π que contiene a P y a r .
 - Un cuadrado $ABCD$ está situado sobre un plano $\pi \equiv 2x + y + z = 4$; dos de sus vértices opuestos son $A(1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 2)$. Hallar el área del cuadrado y la ecuación de la diagonal BD .
 - Determina la condición que deben verificar las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ para que equidiste de los puntos $A(2, 0, 1)$ y $B(0, 2, 1)$. Comprueba que la condición obtenida es al ecuación de un plano que pasa por el punto medio de AB .

- Determina b para que la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ no corte al plano $\pi \equiv 2x - 4y + 5z = 6$.
 - Sean las rectas $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = z - 2$; $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$ calcula su posición relativa.
- Sabiendo que dos lados de un cuadrado están situados sobre las rectas r y s , calcula su área.
- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(2, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$
 - De los planos que contienen a la bisectriz del cuadrante positivo del plano coordenado XY , determina la ecuación del que contiene al eje OZ .
 - Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - \alpha z = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{\beta} = z$, se pide:
 - Calcula α y β para que sean ortogonales y coplanarias.
 - Para $\alpha = 1/2$ y $\beta = -2$ halla la ecuación del plano que contiene a r y a s .
 - Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2z \end{cases}$. Se pide:
 - Razona que se cortan en un punto.
 - Halla dicho punto de corte.
 - Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
 - Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x - z = 3$, $\pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$, se pide:
 - ¿Cuántas rectas hay paralelas a ambos a la vez?

- b) De ellas escribe la ecuación de la que pasa por el origen de coordenadas.
 c) Halla la ecuación del plano simétrico de π_1 respecto al origen de coordenadas.

16. Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$ que pasa por el punto $(1,1,2)$

17. Dada la familia de planos $2mx + (m+1)y - 3(m-1)z + 2m + 4 = 0$

- a. Calcula la ecuación del plano de esta familia que pasa por el punto $(1,-1,2)$

b. Calcula la ecuación del plano de esta familia perpendicular a la recta $s \equiv \begin{cases} x + 3z - 1 = 0 \\ y - 5z - 2 = 0 \end{cases}$

$$\pi_1 \equiv x + ky + z = 0$$

18. Determina la posición relativa de los planos de ecuaciones: $\pi_2 \equiv x - y - kz = 3$ para los distintos valores de k .

$$\pi_3 \equiv 2x + 3y + z = 1$$

19. Dadas las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{-1}$ y $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$, calcula el valor de a para que las rectas se corten y, para dicho valor, calcula el plano que las contiene

20. Se considera la recta $r: x = y = z$, y los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,3,1)$. Determina los puntos P de la recta r tales que los los vectores \vec{AP} y \vec{BP} sean perpendiculares.

21. Dada la recta de ecuaciones $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z+2}{6}$ y el plano de ecuación $x + 3y - 3z = -3$. Calcula :

- a) El plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano π .
 b) El volumen del tetraedro determinado por el plano p y los planos coordenados.

22. Se consideran los puntos $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(a,a,a)$ $a \neq 0$.

- a) Calcula la distancia entre las rectas que pasan por A y B y por O y C
 b) Calcula la distancia de O al plano determinado por los otros tres puntos.

23. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$

- a) Determina su posición relativa.
 b) Calcula la distancia entre ambas

24. Los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

- Calcula las coordenadas de D
- Halla el área de dicho paralelogramo.

25. Estudia en función de a la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 4y + az = 5 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ -x + y + az = 2 \end{cases}$ Halla

la intersección de las rectas anteriores para $a=2$.

26. Se considera el triángulo $A(1,4,2)$ $B(3,1,-1)$ $C(-2,3,5)$

- a) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho triángulo
 b) halla la recta contenida en dicho plano que, pasando por el punto medio del segmento AB , es perpendicular a dicho segmento.

27. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = -1/2 \\ x = 2z + 3 \end{cases}$ decir si existen, y hallar en ese caso:

- a) El plano paralelo a la recta s que contenga a la recta r .
 b) El plano perpendicular a s que contenga a r .
 c) La recta de dirección perpendicular a ambas que pasa por el origen.

28. Probar que los planos $-x + 2ay - 2az = 0$, y $x + ay - az = 0$ se cortan en una recta r que pasa por el origen de coordenadas, cualquiera que sea el valor de $a \neq 0$. Hallar la posición relativa de r con el plano $12x - (a+3)y + 2z = 0$ para los diferentes valores de $a \neq 0$.
29. Un triángulo isósceles ABC , con el ángulo desigual en A , tiene por vértices B y C los puntos $(1, -1, 2)$ y $(3, 1, 0)$, mientras que el vértice A está en la recta: $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$. Halla las coordenadas de A y el área del triángulo ABC .
30. Desde el punto $P(1, 3, 4)$ se trazan rectas perpendiculares a los planos OXY , OYZ , OZX a los que cortan en los puntos A , B y C respectivamente. Hallar la distancia del punto P al plano ABC .
31. Halla la recta que corta perpendicularmente a las rectas:
- $$r \equiv \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
33. Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 3x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$, hallar su posición relativa. Hallar la distancia entre ellas y el plano que las contiene, en caso de que este exista.
34. Se considera el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ y el punto $A(4, 0, -1)$. Hallar el plano que pasando por A , es paralelo a la recta s y perpendicular al plano π .
35. Se considera el punto $P(1, -3, -4)$, el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y el plano π' que pasa por los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$ y $(1, 0, 7)$
- Determinar el plano que pasa por P y es perpendicular a los planos π y π' .
 - Calcular la distancia de P al plano π .
36. Hallar la recta que pasa por el punto $(1, 0, 2)$ y que corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$.
37. Determinar un punto sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ que diste 2 unidades del plano de ecuación $3x - 4y + 12z - 5 = 0$. ¿Cuántas soluciones existen?
38. Para $a \neq 0$ se consideran los planos $-x + 2ay - 2az = 0$ y $x + ay - az = 0$.
- Hallar la posición relativa de ambos planos en función de a .
 - Determinar la recta paralela a ambos pasando por el punto $(0, 0, 0)$.
 - ¿Existe el plano paralelo a ambos pasando por $(0, 0, 0)$? Razonar la respuesta.
39. Hallar la recta que corta a las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$, y pasa por el punto $A(-2, 0, -7)$.
Calcular la distancia del punto A a la recta r .
40. Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$. Se pide:
- Hallar un plano perpendicular a ambos pasando por el punto $(1, 2, -1)$.
 - Determinar una recta paralela a ambos pasando por el punto $(2, 1, 1)$.
 - Calcula el ángulo que forman ambos planos.
41. Calcular el valor de a para que la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax - y + z = 5$ sean paralelos
- ¿Existe algún valor de a para el que r y π sean perpendiculares?
 - Hallar el valor de a para que r y π formen un ángulo de 30° .

42. La recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -6 + 5t \end{cases}$ corta al plano $x - y - 2z = 1$ en el punto A , y al plano $x + y - z = 0$ en el punto B . Si

O es el origen de coordenadas:

- Halla el ángulo formado por los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} .
- Halla el área del triángulo AOB

43. Consideramos los puntos $A(-5, 2, 4)$, $B(-3, 2, 0)$ y la recta $s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

- Calcular la recta que corta perpendicularmente a s pasa por B .
- Consideramos el rectángulo que tiene por vértices opuestos a A y B , y uno de los lados que pasa por A está contenido en la recta s . Calcula su área.

44. Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{\alpha}$ y $r_2 \equiv \frac{x-3}{-2} = y-2 = \frac{z-1}{2}$

- Determinar, en función de α su posición relativa.
- Determinar para $\alpha = 2$, la distancia entre ellas.

45. Hallar el valor del parámetro "a" para que los planos de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + az = 4 \end{cases}$ se corten en una

recta r . Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 1, 3)$ y contiene a la recta r del apartado anterior.

46. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2z = a \end{cases}$

- Hallar el valor de a para que estén en el mismo plano.
- Hallar la ecuación de dicho plano.

47. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

- Escríbese la recta en forma paramétrica
- Para cada punto P de r , determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ

48. Sea m un número real y sean r y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m = 0$$

- Estúdiase la posición relativa de r y π en función del valor de m
- Para el valor $m=1$, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de r y π y es perpendicular a la recta $t \equiv x = y = z$.

49. a) Determínese el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto de la recta $r \equiv x + 1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

b) Hállese la distancia entre A y r .

50. a) Calcúlense los valores de a para los cuales las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$ son

perpendiculares.

b) Para $a = 1$, calcúlese la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y se apoya en r y s .

51. Sea el plano $\pi \equiv x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv x = y = z$. Se pide:

- Calcular la distancia de la recta al plano. (1 punto)
- Hallar un plano que contenga a r y sea perpendicular a π (1 punto)
- Hallar el punto simétrico de $P(-1, 3, 3)$ respecto a π . (1 punto)

52. De una recta r se sabe que está contenida en el plano π de ecuación $x - y = 0$, que $A(0, 0, 0)$ pertenece a r , y que el vector que une A y $B(1, 0, -1)$ es perpendicular a r . Determinar la recta r , y calcular la distancia entre r y el plano paralelo a π que pasa por B . ($x = y = z$; $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Cuestiones.-

1. Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores del plano con $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, probar que los vectores $(\vec{u} + \vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ son ortogonales.
2. Calcula la distancia entre el plano $\pi_1 \equiv x + y - z - 1 = 0$ y el plano π_2 , que es paralelo a π_1 y pasa por el punto $(4, 3, 7)$.
3. Calcula el valor de a para que el producto vectorial de los vectores $(a, -a, 2)$ y $(2, a, 1)$ sea proporcional al vector $(1, 1, 0)$.
4. Determinar α y β para que los planos $6x - \alpha y + 4z + 9 = 0$ y $9x - 3y + \beta z - \beta = 0$ sean paralelos. Calcular la distancia entre dichos planos.
5. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $x - 3 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{3}$ y es paralelo a la recta
$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$
6. Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores ortogonales y de módulo 1, hallar los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $(\vec{u} + a\vec{v})$ y $(\vec{u} - a\vec{v})$ formen un ángulo de 60° .
7. Calcular la distancia entre la recta $r \equiv \frac{x - 1}{2} = y - 2 = \frac{z - 1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 2 = 0$
8. Consideramos el punto $A(1, 4, 2)$, la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$. Calcula la recta que pasa por A , es paralela a π y corta a r .
9. ¿Qué relación debe existir entre a y b para que los vectores $(a, b, 1)$, $(-a, b, a)$ y $(-b, -1, a)$ estén en el mismo plano.
10. ¿Cuál es el ángulo que forma la recta $x = y = z$ con el eje OX ?
11. Determínese si el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4 = 0$ corta o no al segmento de extremos $A(2, 1, 3)$ y $B(3, 2, 1)$
12. Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$
13. Calcúlese la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 2}{-1}$
14. Calcúlese la distancia del origen al plano π que pasa por $A(1, 2, 0)$ y contiene a la recta $r \equiv (x + 2)/2 = (y - 1)/3 = z$.
15. Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r \equiv \frac{x - 1}{2} = y + 2 = \frac{z + 1}{4}$, hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.
16. Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$,
17. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1, 0)$, $B(2, -1, 0)$ y $C(2, 4, 0)$
18. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$, hallar un punto de cada una de ellas, de tal forma, que el vector que los una sea perpendicular a ambas.
19. Calcula la distancia del punto $A(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$
20. Dada la recta $r : 2x + y = 2$, calcular el punto P de la recta r tal que la perpendicular a r por P pase por el punto $(1, -1)$